EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 5

1. a) $-2i(1-a)^2=(1-i)^2(1-a)^2=\left[(1-i)(1-a)\right]^2$

Donc les racines carrées de $-2i(1-a)^2$ sont

$(1-a)(1-i)=1-a-i(1-a)$ et $-(1-a)(1-i)=-1+a+i(1-a)$.

b) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-2i(1-a)^2$ et une racine carrée de Δ est $\delta=(1-a)(1-i)=1-a-i(1-a)$.

Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)-(1-a)(1-i)}{2}=\frac{2a+2i}{2}=a+i$$

et $$z_2=\frac{(1+a)(1+i)+(1-a)(1-i)}{2}=\frac{2+2ia}{2}=1+ia.$$

2. a) M est milieu de $[M_1M_2] \Leftrightarrow z_M=\frac{z_1+z_2}{2} \Leftrightarrow z_M=\frac{(1+a)}{2}(1+i)$.

b) $z_M=\frac{(1+a)}{2}(1+i) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{(1+a)}{2}(\vec{u}+\vec{v})$.

Ainsi lorsque a varie dans $\mathbb{R}$, M décrit la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}+\vec{v}$.

Exercice 6

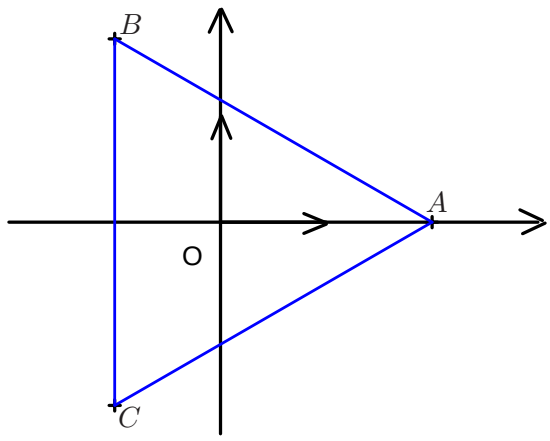
1. a) On a $(z+2)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+2az^2+2bz+2c=az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$,

d' où par identi cation : $\begin{cases} a &= 1 \\ b+2a &= 0 \\ c+2b &= 0 \\ 2c &= 8 \end{cases}$

On obtient $a=1$, $b=2$, $c=4$ d'où $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$.

b) Les racines de l'équation $z^2-2z+4=0$ sont $1-i\sqrt{3}$ et $1+i\sqrt{3}$ donc l'équation (E) a pour ensemble de solution $S=\{-2,1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\}$.

2. a)



b) On a : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$=\sqrt{3^3+(\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{3}$

De même : $AC=\sqrt{3^3+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

et : $BC=\sqrt{0^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

Donc le triangle ABC est équilatéral.